# Moment cinétique et rotations

## I) Introduction

. $\mathcal{R}$ rotation géométrique (agit dans l'espace ordinaire)

. $R$ rotation (opérateur linéaire agissant dans l'espace des états $\mathcal{E}$)

## II) Étude succinte des rotations géométriques $\mathcal{R}$

. $\mathcal{R}$ est déterminée par :

- l'axe de rotation donné par le vecteur unitaire $\vec{u}(\theta, \varphi)$
- l'angle de rotation $\alpha$ $\quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$

. On a :
$$\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) \cdot \mathcal{R}_{\vec{u}'}(\alpha') \neq \mathcal{R}_{\vec{u}'}(\alpha') \cdot \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)$$
$$\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) \cdot \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha') = \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha') \cdot \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha + \alpha')$$

. Pour des rotations infinitésimales on aura :

- $\mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha)\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} + d\alpha\, \vec{u} \times \overrightarrow{OM}$
- $\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha + d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) . \mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha) . \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)$
- $\mathcal{R}_{\vec{e}_y}(-d\alpha') . \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(d\alpha) . \mathcal{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha') . \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha . d\alpha')$

## III) Opérateurs de rotation dans l'espace des états. Exemple d'une particule sans spin.

. Fonctions d'ondes $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$ et $\psi'(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi' \rangle$

. On a : $\vec{r}\,'_0 = \mathcal{R}\vec{r}_0$ . $\psi'(\vec{r}\,'_0) = \psi(\vec{r}_0) \Rightarrow \psi'(\vec{r}\,'_0) = \psi(\mathcal{R}^{-1}\vec{r}\,'_0)$

$\Rightarrow \psi'(\vec{r}) = \psi(\mathcal{R}^{-1}\vec{r})$ .

. $R$ : opérateur de rotation : $|\psi'\rangle = R|\psi\rangle$

. Propriétés de $R$

- linéarité : $R|\psi\rangle = R(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1 R|\psi_1\rangle + \lambda_2 R|\psi_2\rangle$
- unitarité : $R R^{+} = R^{+} R = 1$
- l'ensemble des opérateurs $R$ constitue une représentation du groupe des rotations

. Pour une rotation infinitésimale : $R_{\vec{u}}(d\alpha) = 1 - \frac{i}{\hbar}\, d\alpha\, \vec{L} . \vec{u}$

. Pour une rotation finie : $R_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{L}.\vec{u}}$

. Les relations de commutation du moment cinétique orbital d'une particule apparais sent comme des conséquences de la structure non commutative du groupe des rotations géométriques.

. On a : $[L_i, L_j] = i\hbar\,\delta_{ijk} L_k$

## IV) Opérateurs de rotation dans l'espace des états d'un système quelconque

. Système de 2 particules sans spin (1) et (2). Espace des états $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\vec{r}_1} \otimes \mathcal{E}_{\vec{r}_2}$

où a : $\vec{L}_1 = \vec{R}_1 \times \vec{P}_1$ ; $\vec{L}_2 = \vec{R}_2 \times \vec{P}_2$ ; $R^1_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{L}_1 \cdot \vec{u}}$ ; $R^2_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{L}_2 \cdot \vec{u}}$

$R^1_{\vec{u}}(\alpha) \otimes R^2_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{L}_1\cdot\vec{u}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{L}_2\cdot\vec{u}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{L}\cdot\vec{u}}$ $\quad (\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2)$

$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle \Rightarrow |\psi'\rangle = |\varphi'(1)\rangle \otimes |\varphi'(2)\rangle = [R^1_{\vec{u}}(\alpha)|\varphi(1)\rangle] \otimes [R^2_{\vec{u}}(\alpha)|\varphi(2)\rangle]$

$\Rightarrow |\psi'\rangle = [R^{(1)}_{\vec{u}}(\alpha) \otimes R^{(2)}_{\vec{u}}(\alpha)]\, |\varphi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle = [R^{(1)}_{\vec{u}}(\alpha) \otimes R^{(2)}_{\vec{u}}(\alpha)].|\psi\rangle$

. Pour une rotation finie : $R_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{J}\cdot\vec{u}}$ ($\vec{J}$ : moment cinétique total)

Le moment cinétique total d'un système quantique quelconque est lié aux opérateurs de rotation correspondants. Les relations de commutation entre ses composantes en découlent directement : $[J_i, J_j] = i\hbar\,\delta_{ijk} J_k$

## V) Rotation des observables

. $A$ : observable relative à un système physique donné. $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$

$A'$ : transformé par $R$ de $A$. $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \Rightarrow A'|u'_n\rangle = a_n|u'_n\rangle$

où a $|u'_n\rangle = R\,|u_n\rangle \Rightarrow A'R|u_n\rangle = a_n R|u_n\rangle \Rightarrow R^+A'R|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$

(car $R^{-1} = R^+$) $\Rightarrow R^+A'R = A$ ou $A' = RAR^+$

Rotation infinitésimale $\Rightarrow A' = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha \vec{J}\vec{u}\right) A \left(1 + \frac{i}{\hbar} d\alpha \vec{J}\vec{u}\right) = A - \frac{i}{\hbar} d\alpha\, [\vec{J}\vec{u}, A]$

. Observables scalaires : $\forall R$ on aura $A' = A \Rightarrow [A, \vec{J}] = 0$

Une observable scalaire commute avec les trois composantes du moment cinétique total.

. Observables vectorielles : $\vec{V}\,(V_x, V_y, V_z)$

Relation de commutation : $[J_i, V_j] = i\hbar\,\delta_{ijk} V_k$ $\quad [\vec{J}_{\vec{u}}, \vec{V}_{\vec{u}'}] = i\hbar \vec{V}_{\vec{m}\times\vec{m}'}$

Remarque : $[\vec{V}\cdot\vec{W}, J_i] = 0$

## VI) Invariance par rotation.

. L'hamiltonien d'un système physique isolé est une observable scalaire.

. Le moment cinétique total d'un système isolé est une constante du mouvement.

. Relation de commutation : $[H, \vec{J}] = 0$

. Applications :

$$H|kjm\rangle = E|kjm\rangle$$
$$J^2|kjm\rangle = j(j+1)\hbar^2|kjm\rangle$$
$$J_z|kjm\rangle = m\hbar|kjm\rangle$$

# Propriétés générales des moments cinétiques

## I) Introduction : importance du moment cinétique

- $\vec{L}$ moment cinétique orbital
- $\vec{S}$ moment cinétique intrinsèque ou Spin
- $\vec{J}$ moment cinétique total

## II) Relations de commutation caractéristiques des moments cinétiques

- $\vec{R}$ observable de position $\quad \vec{R} : (R_x, R_y, R_z)$ ou $(X, Y, Z)$

  $\vec{P}$ observable d'impulsion $\quad \vec{P} : (P_x, P_y, P_z)$

  $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ moment cinétique orbital $\quad \vec{L} : (L_x, L_y, L_z)$

  Relations de commutation : $[L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} . L_k$

  Système de N particules sans spin : $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L_i}$ , $\vec{L_i} = \vec{R_i} \times \vec{P_i}$
- Moment cinétique : tout observable $\vec{J}$ tel que : $[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$

  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ opérateur carré scalaire du moment cinétique $\vec{J}$

  Relation de commutation : $[J^2, \vec{J}] = 0 \qquad ([J^2, J_i] = 0)$
- Convention : on cherche le système de vecteurs propres communs à $J^2$ et $J_z$

## III) Théorie générale du moment cinétique

- $J_+ = J_x + i J_y \qquad J_- = J_x - i J_y \qquad J_+$ et $J_-$ opérateurs adjoints

  Relations de commutation : $[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z$

  $$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0$$

  Autre relation : $J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$
- Equations aux valeurs propres : $\begin{cases} J^2 |k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |k,j,m\rangle & j \geq 0 \\ J_z |k,j,m\rangle = m\hbar\, |k,j,m\rangle & -j \leq m \leq j \end{cases}$

  $|k,j,m\rangle$ vecteurs propres communs à $J^2$ et $J_z$
- Propriétés du vecteur : $J_- |k,j,m\rangle$
  - si $m = -j \qquad J_- |k,j,-j\rangle = 0$
  - si $m > -j \qquad J_- |k,j,m\rangle$ est vecteur propre non nul de $J^2$ et $J_z$ avec les valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $(m-1)\hbar$

. Propriétés du vecteur : $J_+|k,j,m\rangle$

- si $m = j$ $\quad J_+|k,j,j\rangle = 0$
- si $m < j$ $\quad J_+|k,j,m\rangle$ est vecteur propre non nul de $J^2$ et $J_z$ avec les valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $(m+1)\hbar$

. Plus généralement :

$$J^2(J_\pm)^n|kjm\rangle = j(j+1)\hbar^2(J_\pm)^n|kjm\rangle \quad \text{si} \quad n \lesseqgtr \pm j$$

$$J_z(J_\pm)^n|kjm\rangle = (m \pm n)\hbar(J_\pm)^n|kjm\rangle \quad \text{si} \quad n \lesseqgtr \pm j$$

. Valeurs possibles de $j$ : $j$ entier ou demi entier ( $j = \frac{n}{2}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ )

. Valeurs possibles de $m$ : $\quad -j \leq m \leq +j \quad$ ( $2j+1$ valeurs possibles )

. $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(j,m)$ : sous espace vectoriel, de dimension $g(j,m)$, formé par l'ensemble des vecteurs propres associés au couple de valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $m\hbar$

. $\mathcal{E}$ : espace d'états dans lequel agit le moment cinétique $\vec{J}$

. Relation d'orthonormalisation $\quad \langle kjm|k'j'm'\rangle = \delta_{kk'}\cdot\delta_{jj'}\cdot\delta_{mm'}$

. Relation de fermeture : $\quad \sum_j \sum_m \sum_k |kjm\rangle\langle kjm| = 1$

. La dimension des sous espaces $\mathcal{E}(j,m)$ est indépendante de $m$ $\quad g(j,m) = g(j)$

. Relations importantes :

$$J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle$$

$$J_\pm|k,j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|k,j,m\pm1\rangle$$

. Élément de matrice :

$$\langle k,j,m|J_z|k',j',m'\rangle = m\hbar\,\delta_{kk'}\cdot\delta_{jj'}\cdot\delta_{mm'}$$

$$\langle k,j,m|J_\pm|k',j',m'\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m'(m'\pm1)}\,\delta_{kk'}\cdot\delta_{jj'}\cdot\delta_{m,m'\pm1}$$

. Pour les éléments de matrice $\langle kjm|J_x|k'j'm'\rangle$ et $\langle kjm|J_y|k'j'm'\rangle$ on utilise les relations : $\quad J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad$ et $\quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$

. Les kets $|kjm\rangle$ sont vecteurs propres de $J^2$ donc :

$$\langle kjm|J^2|k'j'm'\rangle = j(j+1)\hbar^2\,\delta_{kk'}\cdot\delta_{jj'}\cdot\delta_{mm'}$$

## IV) Application au moment cinétique orbital

. En représentation $|r\rangle$ : $\quad \vec{R} \to \vec{r} \quad , \quad \vec{P} \to -i\hbar\vec{\nabla}$

on a : $L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$ ; $L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ ; $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$

coordonnées sphériques : $x = r\sin\theta\cos\varphi$ ; $y = r\sin\theta\sin\varphi$ ; $z = r\cos\theta$

$(r \geqslant 0$ ; $0 \leq \theta \leq \pi$ ; $0 \leq \varphi < 2\pi)$ élément de volume $d^3r = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

élément d'angle solide : $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

on a : $L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ ; $L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ ; $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

et : $L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$ ; $L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ ; $L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$.

- $\psi_{\ell,m}(r,\theta,\varphi) = f(r)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ fonctions propres associées aux valeurs propres de $L^2$ et $L_z$

on aura : $L^2 Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ ; $L_z Y_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

Normalisation : $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, |Y_\ell^m(\theta,\varphi)|^2 d\theta = 1$ et $\int_0^{\infty} r^2 |f(r)|^2 dr = 1$

. Dans le cas d'un moment cinétique orbital $\ell$ et $m$ ne peuvent être qu'entiers.

$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi) \Rightarrow Y_\ell^m(\theta,\varphi) = F_\ell^m(\theta)\, e^{im\varphi}$ ; $Y_\ell^m(\theta,\varphi=0) = Y_\ell^m(\theta,\varphi=2\pi) \Rightarrow e^{2i\pi m} = 1$

. Toutes les valeurs entières de $\ell$ sont réalisées

$L_+ Y_\ell^\ell(\theta,\varphi) = 0 \Rightarrow Y_\ell^\ell(\theta,\varphi) = c_\ell\, (\sin\theta)^\ell\, e^{i\ell\varphi}$ $c_\ell$ : cte de normalisation.

. Relation de récurrence : $L_\pm Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}\; Y_\ell^{m\pm1}(\theta,\varphi)$

$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = F_\ell^m(\theta)\, e^{im\varphi} \Rightarrow e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} - m\cot g\theta\right) Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}\; Y_\ell^{m\pm1}(\theta,\varphi)$

. Relation d'orthonormalisation : $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, \overline{Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)} \cdot Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \delta_{\ell'\ell}\,\delta_{m'm}$

. Relation de fermeture : $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\varphi) \cdot \overline{Y_\ell^m(\theta',\varphi')} = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi - \varphi')$

. Les harmoniques sphériques forment une base orthonormée. Si $f(\theta,\varphi)$ est une fonction quelconque : $f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ ; $c_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, \overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}\, f(\theta,\varphi)$

. Propriétés des $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ : $Y_\ell^m(\pi-\theta, \pi+\varphi) = (-1)^\ell\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

$$\overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)} = (-1)^m\, Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi)$$

. Les fonctions $\psi_{k\ell m}(\vec{r})$ d'une base "standard" de l'espace des fonctions d'onde d'une particule (sans spin) sont de la forme : $\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k,\ell}(r) \cdot Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

on a :

$$L^2 \psi_{k,\ell,m}(\vec{r}) = \ell(\ell+1)\hbar^2\, \psi_{k,\ell,m}(\vec{r})$$

$$L_z \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = m\hbar\, \psi_{k\ell m}(\vec{r})$$

$$L_\pm \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}\; \psi_{k,\ell,m\pm1}(\vec{r})$$

orthonormalisation : $\int d^3r\, \overline{\psi_{k,\ell,m}(\vec{r})} \cdot \psi_{k',\ell',m'}(\vec{r}) = \delta_{kk'}\cdot\delta_{\ell\ell'}\cdot\delta_{mm'}$

$$\int d^3r\, \overline{\psi_{k,\ell,m}(\vec{r})}\, \psi_{k',\ell',m'}(\vec{r}) = \int_0^{\infty} r^2 dr\, \overline{R_{k,\ell}(r)}\, R_{k',\ell'}(r) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, \overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}\, Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)$$

. $|k,\ell m\rangle$ état propre de $L^2$ et $L_z$ d'une particule. On aura pour $L_x$ et $L_y$:
$\langle L_x\rangle = \langle k\ell m|L_x|k\ell m\rangle = 0$ et $\langle L_y\rangle = \langle k\ell m|L_y|k\ell m\rangle = 0$
$\langle L_x^2\rangle = \langle k\ell m|L_x^2|k\ell m\rangle = \frac{\hbar^2}{2}[\ell(\ell+1)-m^2]$ et $\langle L_y^2\rangle = \langle k\ell m|L_y^2|k\ell m\rangle = \frac{\hbar^2}{2}[\ell(\ell+1)-m^2]$
on aura les écarts quadratiques: $\Delta L_x = \Delta L_y = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}[\ell(\ell+1)-m^2]}$
. on a la fonction d'onde d'une particule: $\psi(\vec{r}) = \psi(r,\theta,\varphi) = \langle \vec{r}|\psi\rangle$
on a $\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell}(r)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) \Rightarrow \psi(\vec{r}) = \sum_k \sum_\ell \sum_m c_{k\ell m} R_{k\ell}(r)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$
avec: $c_{k\ell m} = \int d^3r\, \overline{\psi_{k\ell m}(\vec{r})}\, \psi(\vec{r})$
La probabilité de trouver lors d'une mesure simultanée de $L^2$ et $L_z$ les résultats $\ell(\ell+1)\hbar^2$ et $m\hbar$ est: $P_{L^2,L_z}(\ell,m) = \sum_k |c_{k\ell m}|^2$. Nous avons de plus les probabilités: $P_{L^2}(\ell) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} P_{L^2,L_z}(\ell,m)$ et $P_{L_z}(m) = \sum_{\ell\geq|m|} P_{L^2,L_z}(\ell,m)$

## V) Les harmoniques sphériques

. On a: $L_+ Y_\ell^\ell(\theta,\varphi) = 0$ ; $Y_\ell^\ell(\theta,\varphi) = c_\ell (\sin\theta)^\ell e^{i\ell\varphi}$ ; $c_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}$

. on a: $(L_\pm)^p (e^{im\varphi}F(\theta)) = (\mp\hbar)^p e^{i(m\pm p)\varphi} (\sin)^{p\pm m} \frac{d^p}{d(\cos\theta)^p}[(\sin\theta)^{\mp m} F(\theta)]$

. Calcul de $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_\ell^\ell(\theta,\varphi)$.

$$Y_\ell^\ell(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}(\sin\theta)^\ell e^{i\ell\varphi} \quad ; \quad Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(2\ell)!(\ell-m)!}}\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{\ell-m} Y_\ell^\ell(\theta,\varphi)$$

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\, e^{im\varphi}(\sin\theta)^{-m}\frac{d^{\ell-m}}{d(\cos\theta)^{\ell-m}}(\sin\theta)^{2\ell} \quad \to m>0$$

. Calcul de $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_\ell^{-\ell}(\theta,\varphi)$

$$Y_\ell^{-\ell}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}\, e^{-i\ell\varphi}(\sin\theta)^\ell \qquad Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(2\ell)!(\ell+m)!}}\left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^{\ell+m} Y_\ell^{-\ell}(\theta,\varphi)$$

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, e^{im\varphi}(\sin\theta)^m \frac{d^{\ell+m}}{d(\cos\theta)^{\ell+m}}(\sin\theta)^{2\ell} \quad \to m<0$$

. Propriétés.

- $\cos\theta\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}\, Y_{\ell+1}^m(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\, Y_{\ell-1}^m(\theta,\varphi)$

- orthonormalisation: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, \overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}.\, Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$

- $f(\theta,\varphi) = \sum_\ell \sum_m c_{\ell,m} Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ ; $c_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, \overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}\, f(\theta,\varphi)$
- $Y_\ell^m(\pi-\theta, \pi+\varphi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ ; $\overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)} = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi)$

## VI) Couplage de deux moments cinétiques

- $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ : deux moments cinétiques
- Le moment cinétique du système est $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ avec les deux règles de sélection :

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}$$
$$|J_1 - J_2| \leqslant J \leqslant J_1 + J_2$$

- On a :

$$J_1^2 \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle = j_1(j_1+1) \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle$$
$$J_{1z} \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle = m_1 \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle$$
$$J_2^2 \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle = j_2(j_2+1) \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle$$
$$J_{2z} \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle = m_2 \, |j_1 m_1 \, j_2 m_2\rangle$$

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ (produit tensoriel des kets $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$) est la base découplée à $(2j_1+1)(2j_2+1)$ dimensions.

- On a la base couplée $|j_1 \, j_2 \, J M\rangle$ dans laquelle on aura les relations :

$$J_1^2 \, |j_1 j_2 \, J M\rangle = j_1(j_1+1) \, |j_1 j_2 \, J M\rangle$$
$$J_2^2 \, |j_1 j_2 \, J M\rangle = j_2(j_2+1) \, |j_1 j_2 \, J M\rangle$$
$$J^2 \, |j_1 j_2 \, J M\rangle = J(J+1) \, |j_1 j_2 \, J M\rangle$$
$$J_z \, |j_1 j_2 \, J M\rangle = M \, |j_1 j_2 \, J M\rangle$$

- Coefficients de Clebsch Gordan : $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle$

où on : $|j_1 j_2 J M\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle$

- Autre règle de sélection : $M = m_1 + m_2$
- Coefficients de Clebsch Gordan (C.G.)

Le C.G. $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M\rangle$ existe lorsque les deux règles de sélection sont satisfaites : $M = m_1 + m_2$ et $j_1 - j_2 \leq J \leq j_1 + j_2$

Les C.G. sont ~~positifs~~ réels $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M\rangle = \langle J M | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

où on : $\langle j_1 j_1 \; j_2 \; J - j_1 | J J\rangle > 0$

on a : $\langle j_1 j_1 \; j_2 j_2 | j_1 + j_2 \;\; j_1 + j_2\rangle = 1$